APPLICATIONS LINÉAIRES

APPLICATIONS LINEAIRES
Définition

- ***I - Définition***

E et ***F*** deux espaces vectoriels réels

$\mathbf{f} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$

$\quad \mathbf{u} \rightarrow f(\mathbf{u})$

f est linéaire si et seulement si on a :

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{E} \text{ et } \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$$

$$f(\lambda \,.\, \mathbf{u}) = \lambda \,.\, f(\mathbf{u}) \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{E} \text{ et } \forall\, \lambda \in \Re$$

APPLICATIONS LINEAIRES
Exemples

- ***Exemples***

- $E = \Re$, $F = \Re$

$$f : \Re \to \Re$$
$$x \to f(x) = a\,x$$

- $E = \Re^2$, $F = \Re$

$$f : \Re^2 \to \Re$$
$$(x,y) \to f(x,y) = a\,x + b\,y$$

APPLICATIONS LINEAIRES
Exemples

- $E = \Re^2$, $F = \Re^2$

$$f : \Re^2 \to \Re^2$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (2\,x + 3\,y\,,\, x - y)$$

- $E = \Re^3$, $F = \Re^2$

$$f : \Re^3 \to \Re^2$$
$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = (\,x + y + z,\, y)$$

APPLICATIONS LINEAIRES
Propriétés

- ***Propriété caractéristique***

$f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si :

$\forall \lambda \in \Re, \forall \mu \in \Re, \forall u \in E$ et $\forall v \in E$

$$f(\lambda . u + \mu . v) = \lambda . f(u) + \mu . f(v)$$

- ***Propriété***

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$

La réciproque n'est pas vraie

APPLICATIONS LINEAIRES
Propriétés

- ***Exemple***

L'application définie par :

$f: (x, y, z) \rightarrow (x + y, y + 1, z)$

est-elle linéaire ?

$$f(0, 0, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0) = 0_{\Re^3}$$

f n'est pas linéaire

En posant $X = (x, y, z)$, $Y = (x', y', z')$ et $Z = (x'', y'', z'')$

On montre que

$$f(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \neq \alpha f(X) + \beta f(Y) + \gamma f(Z)$$

APPLICATIONS LINEAIRES
Propriétés

- ***Caractérisation d'une application linéaire***

Théorème :

Soient $\{ e_1,\ldots,e_n \}$ une base d'un e.v.r. ***E*** et $\{ v_1,\ldots,v_n \}$ n vecteurs d'un e.v.r. ***F***.

Alors, il existe une *application linéaire* ***unique*** $f : E \rightarrow F$ vérifiant :

$$f(e_i) = v_i \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,n$$

f est **entièrement déterminée** par les images des éléments de la base de ***E***.

APPLICATIONS LINEAIRES
Propriétés

- ***Démonstration :***

Soit $u \in E$, alors u s'écrit d'une façon unique :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit f une application linéaire de E dans F :

$f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$

$f(u) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

Si l'on prend comme définition de f :

$f(u) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, pour $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

f est linéaire et vérifie :

$f(e_i) = v_i$ pour $i = 1,\ldots,n$

APPLICATIONS LINEAIRES
Propriétés

- ***Exemple***

Déterminer l'application linéaire $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ vérifiant :

$f(1,0) = 3$ et $f(0,1) = 2$

Comme les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ forment une base de $\Re^2$, le théorème précédent montre qu'une telle application existe et est unique.

Pour $(x,y) \in \Re^2$, on a :

$(x,y) = x.(1,0) + y.(0,1)$

$f(x,y) = x.f(1,0) + y.f(0,1) = 3\,x + 2\,y$

APPLICATIONS LINEAIRES
Composition des applications linéaires

- ***Composition des applications linéaires***

Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires alors $h = g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire.

démonstration :

$$h(\lambda . u + \mu . v) = g(f(\lambda . u + \mu . v))$$

$$h(\lambda . u + \mu . v) = g(\lambda f(u) + \mu f(v))$$

$$h(\lambda . u + \mu . v) = \lambda\, gof(u) + \mu\, gof(v)$$

$\forall \lambda, \mu \in \Re$ et $\forall u, v \in E$.

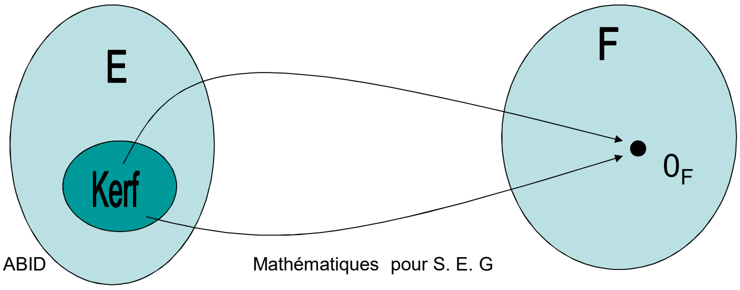
APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

- ***Noyau d'une application linéaire***

Définition : soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Le noyau de **f**, noté **Kerf**, est défini par :

$$\mathrm{Kerf} = \{u \in E \ / \ f(u) = 0_F\}$$



APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

Propriété

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors ***Kerf*** est un ***s.e.v.*** de ***E***.

Démonstration

Kerf n'est pas vide car $0_E \in$ ***Kerf***.

Soit ***u*** et ***v*** deux vecteurs quelconques de ***Kerf*** et λ, μ deux réels quelconques.

$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ (***f*** est linéaire)

$f(\lambda u + \mu v) = \lambda 0_F + \mu 0_F$ (***u*** et ***v*** sont dans ***Kerf***)

$f(\lambda u + \mu v) = 0_F$

Par conséquent, $\lambda u + \mu v$ est dans ***Kerf***.

Kerf est donc un ***s.e.v.*** de ***E***.

APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

- **Exemple**

Soit **f** : $\mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ définie par :

$f(x,y) = (x+y,x+y)$

(f est linéaire, le vérifier)

déterminer Kerf

$$Kerf = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 \,/\, f(x,y) = 0_{R^2}\}$$
$$Kerf = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 \,/\, f(x,y) = (0,0)\}$$
$$Kerf = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 \,/\, x + y = 0\}$$
$$Kerf = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 \,/\, y = -x\}$$
$$Kerf = \{(x,-x) \in \mathfrak{R}^2 \,/\, x \in \mathfrak{R}\}$$
$$Kerf = \{x.(1,-1),\, x \in \mathfrak{R}\}$$
$$Kerf = < (1,-1) >$$

APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

- **Exemple**

Soit **f** : $\mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ définie par :

$f(x, y, z, t) = (x-y+2t,\, x+y+z+3t)$

déterminer Kerf

On pose $X = (x, y, z, t)$; $X \in Kerf \Rightarrow f(X)=O_{\mathfrak{R}^2}$

Donc $y = x + 2t$ et $z = -2x - 5t$

$X = (x, y, z, t) = (x,\, x + 2t,\, -2x - 5t,\, t)$

$X = x\,(1, 1, -2, 0) + t\,(0, 2, -5, 1)$

$X = x\,U + t\,V$ avec $U = (1, 1, -2, 0)$ et $V = (0, 2, -5, 1)$

$\{ U, V \}$ est une famille libre génératrice donc c'est une base de Kerf donc

$Kerf = < U, V >$

APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

- ***Caractérisation des injections linéaires***

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. f est injective si et seulement :

$$Ker f = \{0_E\}$$

Démonstration:

Supposons ***f*** ***injective.***

Soit $u \in Ker f$, alors $f(u) = 0_F$.

Mais f est injective, d'où $u = 0_E$

Donc $Ker f = \{0_E\}$.

APPLICATIONS LINEAIRES
Noyau

Réciproquement,

supposons $Ker f = \{0_E\}$.

Si $f(u) = f(v)$ alors $f(u) - f(v) = 0_F$.

Comme f est linéaire, $f(u) - f(v) = f(u - v) = 0_F$.

Par conséquent,

$u - v \in Ker f$.

Mais $Ker f = \{0_E\}$, donc $u - v = 0_E$ et par conséquent

$u = v$.

f est donc ***injective***.

APPLICATIONS LINEAIRES
Image

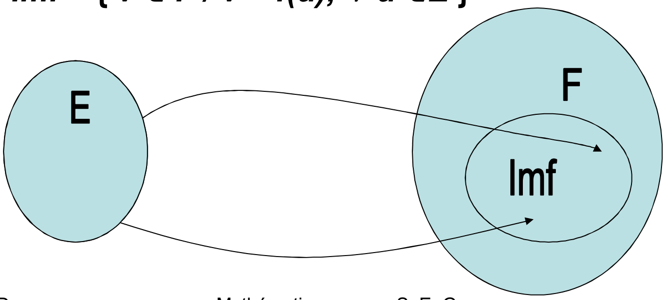
- ***Image d'une application linéaire***

Définition :

soit $\boldsymbol{f : E \rightarrow F}$ une application linéaire.

L'image de ***f***, notée ***Imf***, est l'ensemble ***f(E)*** :

$$Imf = \{ v \in F \,/\, v = f(u),\ \forall u \in E \}$$



APPLICATIONS LINEAIRES
Image

- ***Propriété***

Si $\boldsymbol{f : E \rightarrow F}$ est une application linéaire, alors ***Imf*** est un s.e.v. de ***F***.

Démonstration

Imf n'est pas vide car $0_F \in Imf$.

Soit v_1 et v_2 deux vecteurs quelconques de ***Imf*** et λ_1, λ_2 deux *réels quelconques*.

Alors il existe deux vecteurs u_1 et u_2 de ***E*** tel que l'on ait :

$$v_1 = f(u_1) \text{ et } v_2 = f(u_2).$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_1 . v_1 + \lambda_2 . v_2 = \lambda_1 . f(u_1) + \lambda_2 . f(u_2) = f(\lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2)$$

Donc $(\lambda_1 . v_1 + \lambda_2 . v_2) \in Imf$

APPLICATIONS LINEAIRES
Image

- ***Caractérisation des surjections linéaires***

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est surjective si et seulement :

$$\underline{Imf = F}$$

démonstration :

On a toujours : $Imf \subset F$.

f est *surjective* si et seulement si :

$\forall v \in F, \exists u \in E$ tel que $f(u) = v$.

Donc, $v \in Imf$ et $F \subset Imf$.

APPLICATIONS LINEAIRES
Image

- ***Caractérisation des bijections linéaires***

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors ***f*** est ***bijective*** si et seulement :

$$Kerf = \{0_E\} \text{ et } Imf = F$$

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective.
Alors f^{-1} est ***une application linéaire*** de ***F*** dans ***E***.

APPLICATIONS LINEAIRES
Image

- **Exemple**

  Soit $f : \Re^2 \to \Re^2$ définie par :

  $f(x,y) = (x+y,x+y)$.

  $Imf = ?$ $Kerf = ?$

  $Imf = \{f(x,y) \,/\, (x,y) \in \Re^2\}$
  $Imf = \{(x+y,x+y) \,/\, (x,y) \in \Re^2\}$
  $Imf = \{(x+y).(1,1) \,/\, (x,y) \in \Re^2\}$
  $Imf = \{\lambda.(1,1) \,/\, \lambda \in \Re\}$
  $Imf = \langle(1,1)\rangle$

  $Kerf = \langle(1,-1)\rangle$

APPLICATIONS LINEAIRES
Rang

- ***Rang d'une application linéaire***

Définition :

le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est la dimension de l'*espace vectoriel* Imf.

$$rg(f) = dim(Imf)$$

Remarque :

Étant donné une base $\{ e_1,\ldots,e_n \}$ de E, le rang de f est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de $\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$.

APPLICATIONS LINEAIRES
Rang

Théorème noyau / image :

Soit ***E*** et ***F*** deux ***espaces vectoriels*** de dimension finie et f : E → F une application linéaire. Alors on a :

dimE = dim(Kerf) + dim(Imf)

APPLICATIONS LINEAIRES
Rang

- **Conséquences pratiques**

  Soient ***E*** et ***F*** deux espaces vectoriels de dimension finie et

  f : E → ***F*** une application linéaire.
  - ***f*** est ***injective*** si et seulement si ***rg(f) = dimE.***
  - ***f*** est ***surjective*** si et seulement si ***rg(f) = dimF***.
  - ***f*** est ***bijective*** si et seulement si ***rg(f) = dimE = dimF.***

APPLICATIONS LINEAIRES

Rang

- ***Exemple***

  Soit $f : R^2 \rightarrow R^2$ définie par :

  $f(x,y) = (x+y,x+y)$

  $Imf = <(1,1)> \rightarrow dim(Imf) = 1 = rg(f)$

  $Kerf = <(1,-1)> \rightarrow dim(Kerf) = 1$

  $dim(R^2) = 1 + 1 = 2$